NO DATE 29/03/17.

Πόρισμα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\exists$ μια ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

Απόδ

($\Rightarrow$) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη για κάθε $n=1,2,\dots$ $\exists P_n$ διαμέριση του $[a,b]$: $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\frac{1}{n}$ και άρα

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{0}<U(f,P_n)-L(f,P_n)<\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

θα ισχύει $\lim(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, αν (P_n) διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $\lim(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$

Για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$: $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$.

Από κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση: Αν οι P_n είναι όπως παραπάνω και $I=\int_a^b f(t)\,dt$, τότε εφόσον

$$L(f,P_n)\le I\le U(f,P_n)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{0}\le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{I-L(f,P_n)}\le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{U(f,P_n)-L(f,P_n)}$$

Άρα $L(f,P_n)\to I$ και $U(f,P_n)\to I$

NO DATE

Εφαρμογές - Παραδείγματα.

1) Έστω $c \in \mathbb{R}$

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Έστω $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$

τυχαία διαμέριση του $[\alpha, \beta]$

Για κάθε $k = 1$:

$m_k = \inf\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\} = c$

$M_k = \sup\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\} = c$.

Άρα $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1})$

$$= c(x_n - x_0) = c(\beta - \alpha)$$

Ομοίως $U(f,P) = \dots = c(\beta - \alpha)$

Άρα $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx = \sup\{L(f,P),\ P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\}$

$$= c(\beta - \alpha)$$

$\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx = \inf\{U(f,P),\ P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\}$

$$= c(\beta - \alpha).$$

Άρα η f ολοκληρώσιμη με

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = c(\beta - \alpha).$$

2) Η συνάρτηση Dirichlet
$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\begin{cases}0 & , x\in\mathbb{Q}\\ 1 & , x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

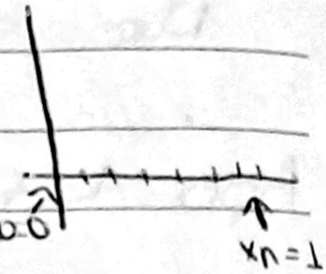
Θα δείξουμε ότι δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω $P=\{0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=1\}$ τυχαία διαμέριση του $[0,1]$.

Για κάθε $k=1,\dots,n$ έστω:

$m_k=\inf\{f(t) , t\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k=\sup\{f(t) , t\in[x_{k-1},x_k]\}$



Για κάθε $k=1,\dots,n$
έχουμε $m_k\geq 0$ (εφόσον $f(x)\geq 0, \forall x$)
και εφόσον υπάρχει άρρητος a_k με
$x_{k-1}<a_k<x_k$ συμπεραίνουμε ότι $m_k=0$.

Επίσης $M_k\leq 1$ (εφόσον $f(x)\leq 1, \forall x$)
και εφόσον υπάρχει ρητός q_k με
$x_{k-1}<q_k<x_k$ συμπεραίνουμε ότι $M_k=1$.

Έτσι $L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{m_k}_{0}(x_k-x_{k-1})=0$

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{M_k}_{=1}(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

$$=x_n-x_0=1-0=1$$

NO DATE

Άρα $\underline{\int_0^1} f(x)dx = \sup\{L(f,P),\ P \text{ διαμέριση του } [0,1]\}$
$= 0.$

$\overline{\int_0^1} f(x)dx = \inf\{U(f,P),\ U \text{ διαμέριση του } [0,1]\}$
$= 1.$

Επομένως αφού $\underline{\int_0^1} f(x)dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)dx.$

η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

3) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. με $f(x) = x$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση

$$P_n = \{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_0} < \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{n}}}{x_1} < \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{2}{n}}}{x_2} < \dots < \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{x_n}\}$$

$$x_n = \frac{k}{n},\ k = 0,1,\dots,n.$$

Εφόσον η f είναι αύξουσα

$m_k = \inf\{f(t),\ t \in [\underset{\overset{\shortparallel}{\frac{k-1}{n}}}{x_{k-1}}, \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{k}{n}}}{x_k}]\} = \frac{k-1}{n}$

$M_k = \sup\{f(t),\ t \in [\overset{\shortparallel}{x_{k-1}}, \overset{\shortparallel}{x_k}]\} = \frac{k}{n}.$

Έτσι $L(f,P_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n^2}(0+1+2+\dots+(n-1)) = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

NO. DATE

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_n \left(U(f,P_n)-L(f,P_n)\right)$

$$= \lim_n \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Άρα η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη
Εφόσον $L(f,P_n) \to \frac{1}{2}$.

$$U(f,P_n) \to \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$.
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση
$P_n = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\quad x_n = 1$$

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n.$$

Εφόσον f αύξουσα

$$m_k = \inf\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$= f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

$$M_k = \sup\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$= f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$L(f, P_n) = f(0)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$
$$= \frac{2n^2 - n - 2n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$U(f, P_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \dots + f(1)\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

Εφόσον $L(f, P_n) \to \frac{1}{3}$ και $U(f, P_n) \to \frac{1}{3}$ συμπεραίνουμε ότι f ολοκληρώσιμη

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

5) $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$.

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες διαμερίσεις με τα προηγούμενα παραδείγματα. Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής:

$$P_n = \{x_0 = 0 < \underset{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\underset{\shortparallel}{x_1}} < \underset{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{\underset{\shortparallel}{x_2}} < \dots < \underset{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{\underset{\shortparallel}{x_n}} = 1\}$$

δηλ, $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, $k=0,1,\dots,n$.

Εφόσον f αύξουσα:

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \underset{f(x_{k-1}) = \sqrt{x_{k-1}} = \frac{k-1}{n}}{\underset{\shortparallel}{m_k}} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(k^2 - (k^2 - 2k + 1)\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(2k-1)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k^2 - 3k + 1)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 9n^2 - 9n + 6n}{6}$$

$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{4n^3 - 5n^2 - n}{6}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^2} \to \frac{2}{3}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k^2-(k+1)^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \dots$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^2} \to \frac{2}{3}$$

Άρα η f ολοκληρώσιμη.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$$

<u>Θεώρημα</u>

Κάθε $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ που είναι μονότονη είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω f αύξουσα (η απόδειξη είναι παρόμοια αν f είναι φθίνουσα)

Καταρχήν η f είναι φραγμένη αφού $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με χρήση του κριτηρίου Riemann.

NO DATE

Έστω ε>0

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση του $[a,b]$ σε n διαστήματα ίσου μήκους $P_n = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$, $x_0 = a$, $x_n = b$

όπου $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$

Για κάθε $k = 1, \dots, n$

$m_k = \inf\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$

$M_k = \sup\{f(t),\ t \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)$

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$\underline{\frac{b-a}{n} = (x_k - x_{k-1})}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \to 0$$

άρα $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$.

Άρα η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.